Soluzione 1:

a) $\begin{cases} Log(x) + Log(y) = 2 \\ x + y = 25 \end{cases} \rightarrow \quad CE: x > 0 \quad ; y > 0$ (0.5 punti)

$\begin{cases} Log(xy) = 2 \\ x = y - 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 10^2 \\ x = y - 25 \end{cases} \rightarrow$ (1.0 punti)

$\begin{cases} (y-25)y = 10^2 \\ x = y - 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 - 25 + 100 = 0 \\ \dots\dots \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} (y-20)(y-5) = 0 \\ \dots\dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 20 \ ; \ y_2 = 5 \\ x_1 = 5 \ ; \ x_2 = 20 \end{cases}$ (1.0 punti)

$\underline{\underline{S = \{(5;20);(20;5)\}}}$ (0.5 punti)

b) $\sqrt{\dfrac{5}{18-x}} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{5}{18-x} = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow 5x^2 = 18 - x \Rightarrow 5x^2 + x - 18 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{10}$

$x_1 = 1.8$, $x_2 = -2$. Delle due soluzioni solo la prima è valida per l'equazione di partenza: $x = 1.8$

c) $\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \dfrac{2}{3}\pi\right)$

Stesso quadrante	Altro quadrante
$5x - \dfrac{\pi}{3} = 2x + \dfrac{2}{3}\pi + k2\pi$ $3x = \pi + k2\pi$ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2}{3}\pi$	$5x - \dfrac{\pi}{3} = -\left(2x + \dfrac{2}{3}\pi\right) + k2\pi$ $7x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $x = -\dfrac{\pi}{21} + k\dfrac{2}{7}\pi$

Soluzione 1 SPAI Bellinzona

a) $2^x + 2^{x-1} = 7 - 2^{x-2} \Rightarrow 2^x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 7 \Rightarrow 2^x \cdot \frac{7}{4} = 7 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

b) $\sqrt{\frac{5}{18-x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{5}{18-x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow 5x^2 = 18 - x \Rightarrow 5x^2 + x - 18 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{10}$

$x_1 = 1.8$, $x_2 = -2$. Delle due soluzioni solo la prima è valida per l'equazione di partenza: $x = 1.8$

c) $2\cos^2(x) + 2\sin(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{2} - 2\sin^2(x)$

$\Rightarrow \; 2\cos^2(x) + 2\sin^2(x) + 2\sin(x) - \sin(x) = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \; 2 + \sin(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2}$

soluzioni generali: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, con $k \in Z$

soluzioni nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$: $x = \frac{7}{6}\pi \;\vee\; x = \frac{11}{6}\pi$

Soluzione 2

a) $-10 = \dfrac{2x+4}{2-x} \Rightarrow 10x-20 = 2x+4 \Rightarrow x=3$

b) dominio di $f(x)$ è l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$

quello di $g(x)$ è $\mathbb{R}$ escluso il numero 2; $\mathbb{R} \setminus 2$ o $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

c) L'asintoto verticale è dato dalla retta d'equazione $x=2$

L'altro asintoto sarà il quoziente della divisione $(2x+4)\div(2-x)$ e cioè la retta orizzontale

d'equazione $y=-2$

$g(x) = \dfrac{2x+4}{2-x} \leq 0$

d) $2x+4=0 \Rightarrow x=-2$

$2-x=0 \Rightarrow x=2$

	-∞		-2		2		∞
2x+4		-	0	+		+	
2-x		+		+	0	-	
g(x)		-	0	+		-	

S = (-∞;-2] U]2;+ ∞)

e) $x^2+3x+2 = \dfrac{2x+4}{2-x} \Rightarrow (x^2+3x+2)\cdot(2-x) = 2x+4 \Rightarrow -x^3-x^2+4x+4 = 2x+4 \Rightarrow$

$x^3+x^2-2x=0 \Rightarrow x\cdot(x^2+x-2)=0 \Rightarrow x\cdot(x+2)\cdot(x-1)=0$

$x_1=-2,\, y_1=0\,;\, x_2=0,\, y_2=2\,;\, x_3=1,\, y_3=6\,.$

i punti d'intersezione sono tre: (-2, 0), (0, 2), (1, 6)

Soluzione 3

a. retta **t**: coefficiente angolare m=150%=1.5=3/2 .La retta passa per B=(12;0)

$0 = 3/2 \cdot 12 + q$; $0 = 18 + q$; $q=-18$;

retta **t**: $y = 3/2 \cdot x - 18$

retta **s**: coefficiente angolare $m' \cdot m = -1$ $m' \cdot 3/2 = -1$; $m' = -2/3$ .La retta passa per C=(90;0)

$0=-2/3 \cdot 90 + q'$; $0 = -60 + q'$; $q' = 60$

retta **s**: $y = -2/3 \cdot x + 60$

b. ricavo il punto **A** intersezione delle rette **s** e **t**:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 18 \\ y = -\frac{2}{3}x + 60 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}x + 60 = \frac{3}{2}x - 18 \\ y = -\frac{2}{3}x + 60 \end{cases} \quad \begin{cases} 78 = \frac{13}{6}x \\ y = -\frac{2}{3}x + 60 \end{cases} \quad \begin{cases} 36 = x \\ y = -\frac{2}{3}36 + 60 = 36 \end{cases}$$

A = (36; 36)

c. data la parabola $y = ax^2 + bx + c$ =>
   - c=0 perché la parabola è passante per l'origine O => sono sufficienti 2 equazione per ricavare **a** e **b**:
   - parabola passante per D: $0 = 108^2 a + 108 b$; $b = -108 a$

La parabola può essere scritta nel seguente modo:

$$y = a x^2 - 108 a$$

La parabola è tangente alla retta **r** nel punto **O**; la funzione di **r** che passa per l'origine ed ha coefficiente angolare m" = 200% =2 è:

$$y=2x$$

Per la condizione di tangenza retta –parabola se risolvo il sistema deve risultare il discriminante nullo: $\Delta=0$

$$\begin{cases} y = ax^2 - 108ax \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = ax^2 - 108ax \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = ax^2 - (108a + 2)x \\ y = 2x \end{cases}$$

$\Delta = [-(108a+2)]^2 \cancel{-4\,a\,0}$ => $a = -2/108 = -1/54$

$b = -108 \cdot (-1/54) = +2$

la parabola è pertanto:

$$y = -1/54\, x^2 + 2\, x$$

d. h_V =ordinata del vertice V =>

$x_v = -2 / [2(-1/54)] = 54$m

$y_v = (-1/54) \cdot 54^2 + 2 \cdot 54 = 54$m (massima altezza raggiunta)

e. $y(36m) = -1/54 \cdot 36^2 + 2 \cdot 36 = 48$m

AE=48-36=12 m; l'uomo cannone supera il tendone ed atterra in D

Soluzione 4

a) La popolazione all'inizio del 1995 è: $N_A(0) = 100'000 \cdot 2^{\frac{0}{25}} = \underline{100'000\ abitanti}$ (1 punto)

La popolazione all'inizio del 2000 è: $N_A(5) = 100'000 \cdot 2^{\frac{5}{25}} = \underline{114'870\ abitanti}$ (1 punto)

b) Numero di abitanti dopo 1 anno (1996): $N_A(1) = 100'000 \cdot 2^{\frac{1}{25}} = 102'811\ abitanti$

Pertanto l'aumento è stato di $\underline{2'811\ abitanti}$. (1 punto)

L'aumento percentuale è stato di: $\frac{x}{2811} = \frac{100}{100'000} \rightarrow x = \underline{2,81\ \%}$ (1 punto)

c) Il tempo «t» impiegato per raddoppiare la popolazione è:

$$200'000 = 100'000 \cdot 2^{\frac{t}{25}} \rightarrow 2 = 2^{\frac{t}{25}} \rightarrow \frac{t}{25} = 1 \rightarrow t = 25$$ (1.5 punti)

L'anno in cui è raddoppiata la popolazione è: $1995 + 25 = \underline{2'020}$ (0.5 punti)

d) Calcolo di "d": (soluzione molto dettagliata) (4 punti)

$$\begin{cases} 115'203 = N_0 \cdot 2^{\frac{2}{d}} \\ 115'203 + 31.95\% \cdot 115'200 = N_0 \cdot 2^{\frac{14}{d}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 115'200 = N_0 \cdot 2^{\frac{2}{d}} \\ 152'010,36 = N_0 \cdot 2^{\frac{14}{d}} \end{cases}$$

Uguagliando rispetto a N_0 si trova:

$$\frac{152'010,36}{2^{\frac{14}{d}}} = \frac{115'203}{2^{\frac{2}{d}}} \rightarrow 1,3195 = 2^{\frac{14}{d}-\frac{2}{d}} \rightarrow 1,3195 = 2^{\frac{12}{d}}$$

$$Log1,3195 = Log2^{\frac{12}{d}} \rightarrow Log1,3195 = \frac{12}{d}Log2 \rightarrow d = \frac{12\ Log2}{Log1,3195}$$

$\underline{d = 30.00065}$ anni (la soluzione d= 30 anni è accettabile)

$$N_0 = \frac{115'203}{2^{\frac{2}{30.00065}}} \rightarrow \underline{N_0 = 110'000,73 \text{ abitanti}}$$

la soluzione N_0=110'000 abitanti è accettabile.

e)

$$\begin{cases} N_A(t) = 100'000 \cdot 2^{\frac{t}{25}} \\ N_B(t) = 110'000 \cdot 2^{\frac{t}{30}} \end{cases} \rightarrow 100'000 \cdot 2^{\frac{t}{25}} = 110'000 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$$ (1 punto)

$$2^{\frac{t}{25}-\frac{t}{30}} = 1,1 \rightarrow \frac{6t-5t}{150} = \log_2 1,1 \rightarrow t = 150 \cdot \log_2 1,1 \rightarrow t = 20,6255\ anni$$ (0.5 punti)

Le due città avranno lo stesso numero di abitanti nel $\underline{2015}$ (0.5 punti)

Soluzione 5

a)

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AE}\right|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\overrightarrow{BE}\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}=6$$

quindi il triangolo è isoscele

b) **Angolo** $\hat{CBE}$:

L'angolo $\hat{CBE}$ corrisponde all'angolo tra il vettore $\overrightarrow{BE}$ e l'asse y:

$$\cos(\alpha_y)=\frac{y_{\overrightarrow{BE}}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}\Rightarrow\alpha_y=\arccos\left(\frac{4}{6}\right)\cong 48{,}19^{\circ}$$

Oppure con il prodotto scalare tra i vettori $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BE}$.

c) **Area del trapezio BCEF**:

Anche in questo caso ci sono diverse possibilità. Utilizziamo la trigonometria:

$$A=\frac{(B+b)\cdot h}{2}=\frac{(BC+EF)\cdot BE\cdot\sin(C\hat{B}E)}{2}=\frac{(12+4)\cdot 6\cdot\sin(48{,}19^{\circ})}{2}\cong 35{,}78$$

d) **Coordinate dei punti G e H**:

Dal disegno vediamo che: G (2; 0; 6) oppure $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ e H è punto medio tra A e B, quindi H (2; 2; 7)

Soluzione 6

a) Il triangolo AIE è un triangolo rettangolo con l'ipotenusa AI di 20 cm e il cateto AE di 10 cm. Il cateto EI ha una lunghezza di $\sqrt{20^2-10^2}=10\cdot\sqrt{3}$ cm (circa 17.32 cm)

b) Il triangolo ALF è simile al triangolo AIE; è rettangolo con l'ipotenusa AL di 20 cm e il cateto AF di 10 cm. L'angolo LAF vale arccos(10/20) = 60°. L'angolo ϕ è il complementare dell'angolo LAF e dunque vale 90° - 60° = 30°

c) I triangoli DAL, LAI, IAB sono tre triangoli isosceli uguali. L'area di uno di questi triangoli vale 100 cm² (considerando il triangolo DAL possiamo moltiplicare la base DA di 20 cm per l'altezza di 10 cm. Dividendo per 2 otteniamo i 100 cm²). L'area del poligono BCDLIB vale l'area del quadrato ABCD meno l'area dei tre triangoli: $20^2-3\cdot 100$ = 100 cm²

d) L'area del settore circolare ADB vale $20^2\cdot\pi\div 4=100\cdot\pi$ cm². Sottraendo l'area dei tre triangoli otteniamo l'area dei 3 segmenti circolari: $100\cdot\pi-300=100\cdot(\pi-3)$ cm². (circa 14,16 cm²)