Soluzioni

Esercizio 1 (10 punti)

a) **(1 punto per le C.E., 1 punto per il cambiamento di base, 1 punto per la risoluzione, 1 punto per l'esclusione del valore estraneo)**

$$\log_2(x+1)-\log_4(x+4)=1$$

$$C.E.:\quad x>-1$$

$$\Rightarrow \log_2(x+1)-\frac{\log_2(x+4)}{\log_2(4)}=1 \Rightarrow \log_2(x+1)-\frac{\log_2(x+4)}{2}=1$$

$$\Rightarrow 2\log_2(x+1)-\log_2(x+4)=2 \Rightarrow \log_2\left((x+1)^2\right)-\log_2(x+4)=2$$

$$\Rightarrow \log_2\left((x+1)^2\right)-\log_2(x+4)=2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{(x+1)^2}{x+4}\right)=2$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x+4}=2^2 \Rightarrow x^2+2x+1=4x+16$$

$$\Rightarrow x^2-2x-15=0 \Rightarrow x=-3 \vee x=5$$

Unica soluzione accettabile: $x=5$

b) **(1 punto sost. $\sin^2$, 1 punto risultati in t, 1 punto soluzione in x.)**

$$3\cos(2x)=2\sin^2(2x)$$

$$\Rightarrow 3\cos(2x)=2\left(1-\cos^2(2x)\right) \Rightarrow 3\cos(2x)=2-2\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow 2\cos^2(2x)+3\cos(2x)-2=0$$

sost. $\cos(2x)=t$

$2x=\arccos(t)$

$$\Rightarrow 2t^2+3t-2=0 \Rightarrow t=-2 \vee t=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2x=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi \qquad\qquad 2x=-\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi \qquad\qquad x=-\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi=\frac{5\pi}{6}+k\cdot\pi$$

c) **(1 punto isolare il radicale, 1 punto risolvi eq secondo grado, 1 punto esclusione valore estraneo.)**

$$\sqrt{3-x}+x=2 \Rightarrow \sqrt{3-x}=2-x$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{3-x}\right)=(2-x)^2$$
$$\Rightarrow x^2-3x+1=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$\text{unica soluzione accettabile:}$$
$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Esercizio 2 (10 punti)

a) $R(x)=150\cdot x$, **(0.5 punti)**
   a. dominio $D_R=[\,1\,;\,16]$ **(0.5 punti)**

b) i) $C(1)=200$ CHF, $C(6)=600$ CHF **(1 punto, 0.5 cadauno)**
   ii) $C(8)=900$ CHF **(1 punto)**

c) No, non è conventiente in quanto $C(13)>R(13)$ **(1 punto)**

d) $C(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ (è una funzione polinomiale di II° grado)

Utlizzando i dati trovati al punto 2: $\begin{cases} a+\ b+\ c=200 \\ 36a+6b+c=600, \\ 64a+8b+c=900 \end{cases}$ **(1 punto per il sistema)**

Risolvendo il sistema si trova a= 10; b = 10; c= 180; per cui
$C(x)=10\cdot x^2+10\cdot x+180$ **(2 punti per C(x))**

e) $G(x)=R(x)-C(x)=150\cdot x-(10\cdot x^2+10\cdot x+180)=-10\cdot x^2+140\cdot x-180$
Massimo guadagno :
G(x) è una funzione polinomiale di II° grado, con un coefficiente dominante negativo (-10 <0). Il vertice, se appartiene al dominio della funzione, è il massimo della funzione. **(1 punto, se controlla)**
L'ascissa del vertice è $x_{MG}=\frac{-(140)}{2\cdot(-10)}=7$ mobili, appartiene al dominio [1;16], dunque il massimo è il vertice. **(1 punto per l'ascissa)**
L'ordinata del vertice:
$G(x_{MG})=-10\cdot 7^2+140\cdot 7-180=310$ CHF
Con la vendita (e la produzione) di 7 mobili il falegname ottiene il massimo guadagno che è di
310 CHF. **(1 punto)**

Esercizio 3 (10 punti)

a) Dominio della funzione: **(0.5 punti svolgimento + 0.5 insieme soluzioni)**

$valori\ eccezionali$:

$D = 0$: $36 - 4x^2 = 0$; $4(9 - x^2) = 0$ $(3 - x)(3 + x) = 0$ => $x_1 = +3$; $x_2 = -3$

Dominio: $]-\infty; -3[\cup]-3; +3[\cup]+3; +\infty[$

b) Intersezione assi cartesiani

(0.5 punti asse y)

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^3 - 7x^2 - 15x}{36 - 4x^2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{2(0)^3 - 7(0)^2 - 15(0)}{36 - (0)^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad => A = (0; 0)$$

(0.5 punti VE + 1 punto svolgimento)

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^3 - 7x^2 - 15x}{36 - 4x^2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{2x^3 - 7x^2 - 15x}{36 - 4x^2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \cdot mcm = \dfrac{2x^3 - 7x^2 - 15x}{\cancel{36 - 4x^2}} \cdot \cancel{mcm} \\ y = 0 \end{cases}$$

$2x^3 - 7x^2 - 15x = 0$; $x(2x^2 - 7x - 15) = 0 \rightarrow x_A = 0$; $x_{B-C} = \frac{+7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} \rightarrow \begin{cases} x_{B=+5} \\ x_{C=-3/2} \end{cases}$

Le intersezioni sono: $A = (0; 0)$; $B = (+5; 0)$; $C = (-\frac{3}{2}; 0)$

c) Asintoto verticale **(1 punto):**

Verifica dell'esistenza dell'asintoto verticale nei punti $x_1 = +3$; $x_2 = -3$

$x_1 = +3 \rightarrow N(+3) = 2(+3)^3 - 7(+3)^2 - 15(+3) = -54 \neq 0 \rightarrow x = +3$ è asintoto verticale

$x_2 = -3 \rightarrow N(-3) = 2(-3)^3 - 7(-3)^2 - 15(-3) = -72 \neq 0 \rightarrow x = -3$ è asintoto verticale

Asintoto orizzontale/obliquo **(vale 2 punti)**

Grado Numeratore: 3° grado; Grado denominatore: 2° grado => 3-2=1 esiste l'asintoto obliquo:

$2x^3$	$-7x^2$	$-15x$	0	$-4x^2$	$+36$
$-2x^3$		$+18x$		$-x/2$	$+7/4$
/	$-7x^2$	$+3x$			
	$+7x^2$		-63		
		$3x$	-63		

Asintoto obliquo: $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{4}$

d) f(x)>0: **(1 punto scomposizione num. + 1.5 punti tabella + 0.5 punti insieme sol)**

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 15x}{36 - 4x^2} \geq 0; \quad \frac{x(x-5)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{4(3+x)(3-x)} \geq 0 \quad C.E.\ x \neq 3\ e\ x \neq -$$

	-3	-3/2	0	+3	+5	
$x - 5$	-	-	-	-	-	+
$x + 3$	-	+	+	+	+	+
$-x + 3$	+	+	+	+	-	-
$x + 3/2$	-	-	+	+	+	+
x	-	-	-	+	+	+
Riass. segno	+	-	+	-	+	-

$\rightarrow f(x) \geq 0$: $]-\infty; -3[\cup[-\frac{3}{2}; +0]\cup]+3; +5]$

e) scelta della funzione: n° 2 **(1 punto)**

Esercizio 4 (10 punti)

a) Nautilus

$\mathrm{R}(4\pi) = 0.8 \cdot \mathrm{e}^{(0.2\cdot 4\pi)} = \mathbf{9.87}\ \boldsymbol{cm}$ **(0.5 punti)**

$\alpha^{rad} = 900° * \frac{\pi}{180°} = 5\pi$

$\mathrm{R}(5\pi) = 0.8 \cdot \mathrm{e}^{(0.2\cdot 5\pi)} = \mathbf{18.51}\ \boldsymbol{cm}$ **(0.5 punti)**

b) Nautilus **(0.5 punti equazione + 1.5 svolgimento)**

$2\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}_0 \cdot \mathrm{e}^{(0.2\cdot\alpha)}; \quad 2 = \mathrm{e}^{(0.2\cdot\alpha)} \leftrightarrow log_e(2) = 0.2 \cdot \alpha \rightarrow \alpha = \frac{log_e(2)}{0.2} = \mathbf{5}\boldsymbol{log_e}(2) = \mathbf{3.47}\ \boldsymbol{rad.}$

c) Argos:

$$\begin{cases} 0.750 = A \cdot e^{b\cdot 2\pi/3} \\ 1.026 = A \cdot e^{b\cdot\pi} \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0.750/e^{b\cdot 2\pi/3} \\ 1.026 = (0.750/e^{b\cdot 2\pi/3}) \cdot e^{b\cdot\pi} \end{cases}$$

(1 punto sistema)

(2 punti svolgimento)

(0.5 punti A + 0.5 b)

$1.368 = e^{b\frac{1}{3}\pi} \leftrightarrow b\frac{1}{3}\pi = log_e(1.368) \rightarrow \boldsymbol{b} = 3 \cdot \frac{log_e(1.368)}{\pi} = \mathbf{0.3};$ $\quad A = \frac{1.026}{e^{0.3\cdot\pi}} = \mathbf{0.4}$

d) Confronto Argos-Nautilus

$Argos\colon\ R = 0.4 \cdot e^{(0.3\cdot\alpha)} \qquad Nautilus\colon\ R = 0.8 \cdot e^{(0.2\cdot\alpha)}$ **(1 punto equazione)**

(1 punto logaritmi)

$0.4 \cdot e^{(0.3\cdot\alpha)} = 0.8 \cdot e^{(0.2\cdot\alpha)}; \quad e^{(0.3\cdot\alpha)} = 2 \cdot e^{(0.2\cdot\alpha)}; \quad log_e(e^{(0.3\cdot\alpha)}) = log_e(2 \cdot e^{(0.2\cdot\alpha)});$

(1 punto soluzione)

$0.3 \cdot \alpha \cdot 1 = log_e(2) + 0.2 \cdot \alpha \cdot 1; \quad 0.1 \cdot \alpha = log_e(2) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = 10 \cdot log_e(2) = \mathbf{6.93}\ \boldsymbol{radianti}$

Esercizio 5 (10 punti)

a) **(2 punti)**

$\vec{AC} = 2\vec{AE}; \qquad \vec{AD} = 2\vec{BE}$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} \rightarrow \vec{OC} = \vec{AC} + \vec{OA} \rightarrow \begin{Bmatrix} -10 \\ 10 \\ 16 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6 \\ 7 \\ 11 \end{Bmatrix} \rightarrow 1punto$$

$$\vec{BD} = \vec{OD} - \vec{OB} \rightarrow \vec{OD} = \vec{BD} + \vec{OB} \rightarrow \begin{Bmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{Bmatrix} \rightarrow 1punto$$

b) **(3 punti)**

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\begin{Bmatrix}-2\\5\\-1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}4\\-3\\-5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-6\\8\\4\end{Bmatrix}\rightarrow 0.5punti$$

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-6)^2+8^2+4^2}=2\sqrt{29}\cong 10,770\rightarrow 0.5punti$$

$$\vec{AD}=\vec{OD}-\vec{OA}=\begin{Bmatrix}0\\-1\\7\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}4\\-3\\-5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-4\\2\\12\end{Bmatrix}\rightarrow 0.5punti$$

$$\left|\vec{AD}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+12^2}=2\sqrt{41}\cong 12,806\rightarrow 0.5punti$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{\left|\vec{AD}\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|}=\frac{(-6)(-4)+8\cdot 2+4\cdot 12}{2\sqrt{412}\cdot\sqrt{29}}\cong 0.638 \quad\rightarrow\alpha\cong 50,36° \quad\rightarrow 1punto$$

c) **(3 punti)**

$$\vec{AE}=\vec{OE}-\vec{OA}=\begin{Bmatrix}-1\\2\\3\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}4\\-3\\-5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-5\\5\\8\end{Bmatrix}\rightarrow\vec{AC}=2\cdot\begin{Bmatrix}-5\\5\\8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-10\\10\\16\end{Bmatrix}\rightarrow 1punto$$

$$\vec{BE}=\vec{OE}-\vec{OB}=\begin{Bmatrix}-1\\2\\3\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}-2\\5\\-1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-3\\4\end{Bmatrix}\rightarrow\vec{BD}=2\cdot\begin{Bmatrix}1\\-3\\4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\-6\\8\end{Bmatrix}\rightarrow 1punto$$

$$A=\sqrt{\frac{26,55}{2}\left(\frac{26,55}{2}-2\sqrt{29}\right)\left(\frac{26,55}{2}-\sqrt{114}\right)\left(\frac{26,55}{2}-\sqrt{26}\right)}\cong 26,55\rightarrow 1punto$$

$$oppure\ ;\quad A=\frac{12,806\cdot\sin(50,36)\cdot 10,770}{4}=26,55$$

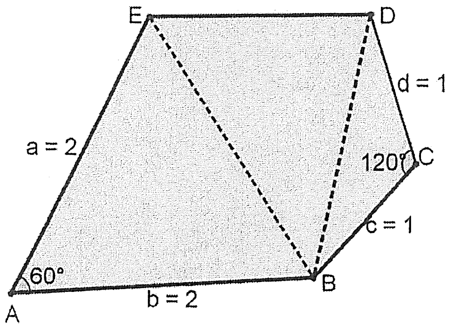
d) **(1 punto)**

$$\left|\vec{AC}\right|=\sqrt{(-10)^2+10^2+16^2}=2\sqrt{114}\cong 21,35 \qquad \left|\vec{BD}\right|=\sqrt{(-6)^2+2^2+8^2}=2\sqrt{26}\cong 10,198\rightarrow 1punto$$

e) **(1 punto)**

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD}=(-10)(2)+10\cdot(-6)+16\cdot 8=48\neq 0\rightarrow no\ \text{perpendicolarità}\rightarrow romboide\rightarrow\rightarrow 1punto$$

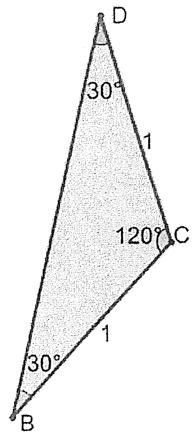
Esercizio 6 (10 punti)



a) **(4 punti)**

<u>Triangolo *ABE* è equilatero</u>

$BE = 2$ **(0.5 punti)**



<u>Triangolo *BCD* è isoscele</u>

$BD = \sqrt{3}$ **(1.5 punti)**

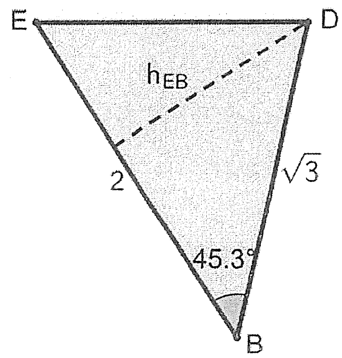
(Teorema del coseno, o separazione in triangoli rettangoli)

<u>Triangolo *BDE* qualsiasi</u>

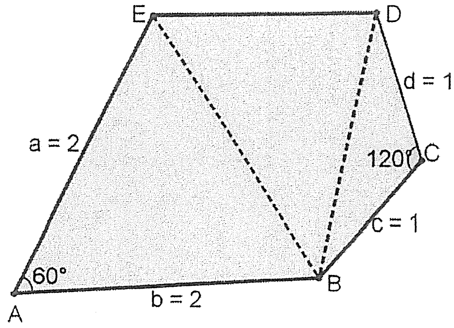
Angolo $E\hat{B}D = 135{,}3° - 60° - 30° = 45{,}3°$ **(0.5 punti)**

$e = ED = \sqrt{BD^2 + BE^2 - 2BD \cdot BE \cdot \cos(45{,}3°)} = 1{,}46$ **(1.5 punti)**

(Teorema del coseno)

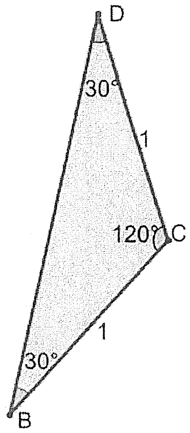


b) **(3 punti)**



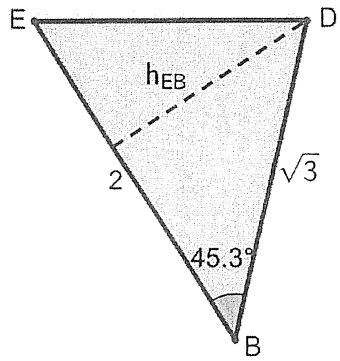
$$Area_{ABE} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}2^2 = \sqrt{3}$$ **(1 punto)**

(Triangoli rettangoli, teorema di Pitagora o Teorema di Erone)



$$Area_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$ **(1 punto)**

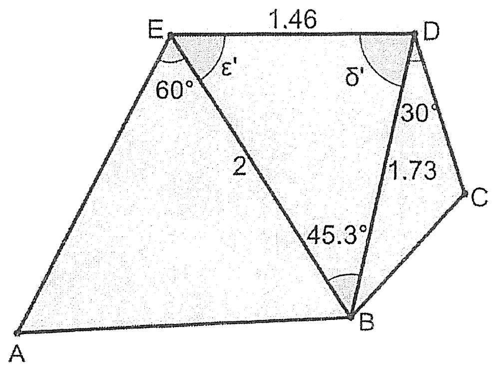
(Altezza da triangolo rettangolo, o Teorema di Erone)



Altezza rispetto EB : $h_{EB} = BD \cdot \sin(45{,}3°) = 1{,}23$ (Triangolo rettangolo)

$$Area_{BDE} = \frac{EB \cdot h_{EB}}{2} = 1{,}23$$ **(1 punto)**

AREA TOTALE: $AREA_{ABCDE} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 1{,}23 = 3{,}4$



c) **(3 punti)**

Angoli $\varepsilon' = D\hat{E}B$ e $\delta' = B\hat{D}E$

Uno dei due ricavabile con il teorema del coseno o il teorema del seno (ma in questo caso **attenzione alla doppia soluzione**!):

$$\cos(\delta') = \frac{1{,}46^2 + 1{,}76^2 - 2^2}{2 \cdot 1{,}46 \cdot 1{,}76} \Rightarrow \delta' = 77{,}1°$$

(1.5 punti) T. del coseno

(1 punto) Col T. del seno senza l'esclusione della seconda soluzione

$$\varepsilon' = 180° - 45{,}3° - 77{,}1° = 57{,}6°$$

(1 punto)

l'angolo trovato con 180-....

Concludendo:

$$\delta = \delta' + 30° = 107{,}1°$$
$$\varepsilon = \varepsilon' + 60° = 117{,}6°$$

(0.5 punti)