SOLUZIONI ESAME 2003 SPAI Bellinzona

1. risolvere la disequazione $f(x) \geq \frac{1}{f(x)}$ nei seguenti casi:

a) f(x) = x

$$x \geq \frac{1}{x} \rightarrow x - \frac{1}{x} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \rightarrow \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x} \geq 0$$

	-1	0	1	
x - 1	-	-	-	+
x + 1	-	+	+	+
x	-	-	+	+
	-	**+**	**-**	**+**

facendo attenzione di escludere ciò che annulla il denominatore avremo

soluzione: x ∈ [-1; 0[∪ [1; ∞[(-1 ≤ x < 0 ∨ 1 ≤ x)

b) f(x) = 1 - x

$$1-x \geq \frac{1}{1-x} \rightarrow 1-x-\frac{1}{1-x} \geq 0 \rightarrow \frac{(1-x)^2-1}{1-x} \geq 0 \rightarrow \frac{(-x)\cdot(2-x)}{1-x} \geq 0$$

	0	1	2	
-x	+	-	-	-
2 - x	+	+	+	-
1 - x	+	+	-	-
	+	**-**	**+**	**-**

soluzione: x ∈]-∞; 0] ∪]1; 2] (x≤0 ∨ 1 < x ≤ 2)

<u>metodo alternativo:</u>
vista a) possiamo scrivere: -1 ≤ f(x) < 0 ∨ 1 ≤ f(x). Cioè -1 ≤ 1 - x < 0 ∨ 1 ≤ 1 - x

-1 ≤ 1 - x diventa x ≤ 2 , 1 - x < 0 diventa 1 < x e 1 ≤ 1 - x diventa x ≤ 0

e avremo : x ≤ 0 ∨ 1 < x ≤ 2

c) f(x) = x^2 - 4x + 3

$$x^2-4x+3 \geq \frac{1}{x^2-4x+3} \rightarrow x^2-4x+3-\frac{1}{x^2-4x+3} \geq 0 \rightarrow$$
$$\frac{(x^2-4x+2)\cdot(x^2-4x+4)}{x^2-4x+3} \geq 0 \rightarrow \frac{(x-2-\sqrt{2})\cdot(x-2+\sqrt{2})\cdot(x-2)^2}{(x-3)(x-1)} \geq 0$$

	2-√2	1	3	2+√2	
x-2+√2	-	+	+	+	+
x-2-√2	-	-	-	-	+
x - 1	-	-	+	+	+
x - 3	-	-	-	+	+
	+	**-**	**+**	**-**	**+**

soluzione: x ∈]-∞; 2 - √2] ∪]1; 3[∪ [2 + √2; ∞[

<u>metodo alternativo:</u> (-1 ≤ f(x) ∧ f(x) < 0) ∨ 1 ≤ f(x)

-1 ≤ f(x) diventa -1 ≤ x^2 - 4x + 3 cioè 0 ≤ x^2 - 4x + 4 o ancora 0 ≤ $(x - 2)^2$ dunque x ∈]-∞; ∞[

0 > f(x) diventa 0 > x^2 - 4x + 3 cioè 0 > (x - 3)(x - 1) dunque x ∈]1; 3[

1 ≤ f(x) diventa 1 ≤ x^2 - 4x + 3 cioè 0 ≤ x^2 - 4x + 2 e dunque x ∈]-∞; 2 - √2] ∪ [2 + √2; ∞[

tirando le somme abbiamo: x ∈]-∞; 2 - √2] ∪]1; 3[∪ [2 + √2; ∞[

2)a)

$$\frac{3^{2x}+2\cdot 3^{x}+1}{3^{x+2}-3^{x}}=\frac{2}{3}$$

$$3\cdot 3^{2x}+6\cdot 3^{x}-18\cdot 3^{x}+2\cdot 3^{x}+3=0$$

$$3\cdot 3^{2x}-10\cdot 3^{x}+3=0\rightarrow u=3^{x}$$

$$3u^{2}-10u+0=0\rightarrow u_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot 3\cdot 3}}{6}\rightarrow u_{1}=\frac{1}{3}\rightarrow u_{2}=3$$

$$I)\,\frac{1}{3}=3^{x}\rightarrow 3^{-1}=3^{x}\rightarrow x_{1}=-1;$$

$$II)\,3=3^{x}\rightarrow x_{2}=1$$

b)

$$4\cos^{2}(x)-2sen(x)-1=0$$

$$4\left(1-sen^{2}x\right)-2sen(x)-1=0$$

$$4sen^{2}(x)+2sen(x)-3=0\rightarrow sen(x)=t$$

$$4t^{2}+2t-3=0\rightarrow t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 3\cdot 4}}{8}=\frac{-2\pm 2\sqrt{13}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}$$

$$\rightarrow t_{1}\cong -1{,}151(imposs)\rightarrow t_{2}\cong 0{,}651$$

$$sen(x)=0{,}651\rightarrow x=40{,}646°$$

$$x_{1}=40{,}646°+k\cdot 360°\rightarrow x_{2}=\left(180°-40{,}646°\right)+k\cdot 360°=139{,}353°+k\cdot 360°$$

3) Sia t il tempo e s lo spazio totale avremo:

$$\begin{cases} t = \dfrac{s}{260} \quad (1) \\ \dfrac{\frac{3}{4}s}{260} + \dfrac{\frac{1}{4}s}{100} = t + 0{,}5 \quad (2) \end{cases}$$

Sostituendo (1) in (2) avremo:

$$\frac{3}{1040}s + \frac{1}{400}s = \frac{s}{260} + 0{,}5$$

$$\frac{3}{1040}s + \frac{1}{400}s - \frac{s}{260} = 0{,}5 \rightarrow \frac{1}{650}s = 0{,}5 \rightarrow s = 325km$$

$$t = \frac{325}{260} = 1{,}25h \rightarrow 12h - 1h\,15\min = 10h\,45\min$$

4)

$$y = f(x) = ax + b$$

$$y = \frac{1}{5}x - 80$$

$$y = g(x) = ax^2$$

a) condizione di tangenza: Δ=0

$$\frac{1}{5}x - 80 = ax^2$$

$$ax^2 - \frac{1}{5}x + 80 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} - 4a \cdot 80}}{2a}$$

$$\Delta = \frac{1}{25} - 4a \cdot 80 = 0 \rightarrow a = 1{,}25 \cdot 10^{-4} \rightarrow y = g(x) = AB = 1{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 = 0{,}000125x^2 \rightarrow x > 0$$

b) Punto di tangenza (Δ=0)

$$b)\frac{1}{5}x - 80 = 1{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 \rightarrow 1{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - \frac{1}{5}x + 80 = 0$$

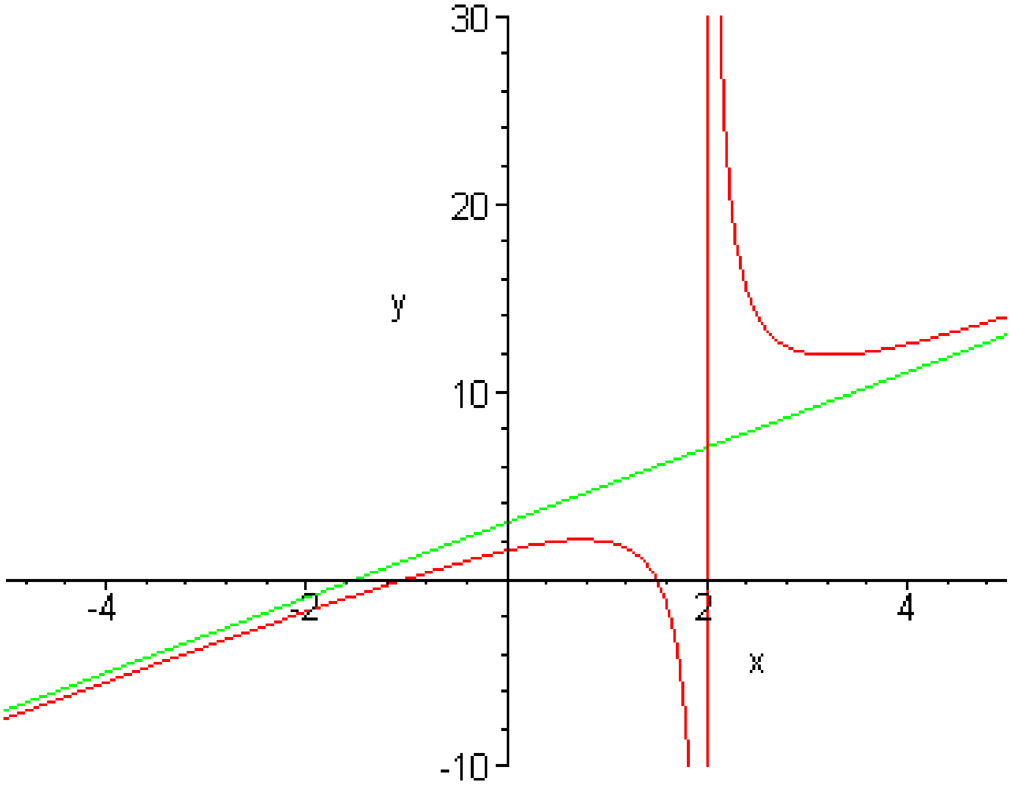
$$x_1 = x_2 = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4}} = 800 \rightarrow f(800) = \frac{1}{5} \cdot 800 - 80 = 80 \rightarrow B(800;80)$$

5) Funzione razionale fratta

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 2} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-3,8	-2	-1/3	1	1	indef	13	13	14,3

a) rappresentazione



b) Ricerca asintoti

1°) asintoto verticale

$$B(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$
$$A(2) = 3 \neq 0 \Rightarrow x = 2 \text{ é un asintoto verticale} \rightarrow \text{Dominio}:]-\infty;2[u]2;+\infty[$$

2°) asintoto obliquo

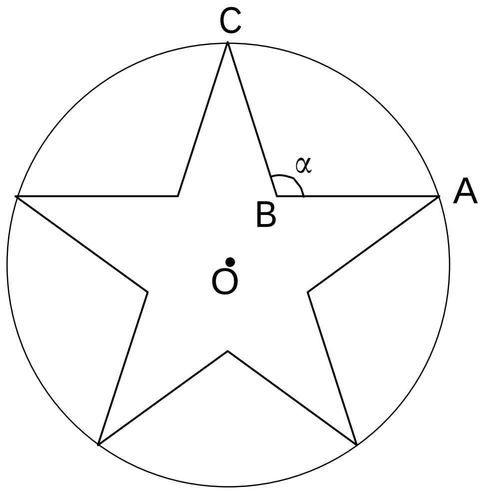
$$\left(2x^2 - x - 3\right):(x-2) = 2x + 3 + \frac{3}{x-2} \Rightarrow y = g(x) = 2x + 3 \text{ é un asintoto obliquo}$$

c) Intersezione asse x

$$f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} \rightarrow x_1 = -1 \rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$$

6)

a) $5\alpha = (n-2)180° = (5-2)180° = 540° \rightarrow \alpha = 108°$



b)

$$\frac{OH}{OA} = sen18° \rightarrow OH = 5{,}5 \cdot sen18°$$

$$CH = OC - OH = 5{,}5 - 5{,}5 \cdot sen18° = 3{,}8$$

$$\rightarrow AH = 5{,}5 \cdot \cos 18° = 5{,}231$$

$$\frac{CH}{BC} = \cos 18° \rightarrow BC = \frac{CH}{\cos 18°} = 3{,}996$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{3{,}8 \cdot 3{,}996}{2} = 7{,}592$$

c) $A_{pentagono} = \dfrac{OM \cdot DE}{2} \cdot 5 = \dfrac{11 \cdot sen36° \cdot 5{,}5 \cdot \cos 36°}{2} \cdot 5 = 71{,}923$

$$A_{stella} = 71{,}923 - 5 \cdot 7{,}592 \cong 33{,}96$$