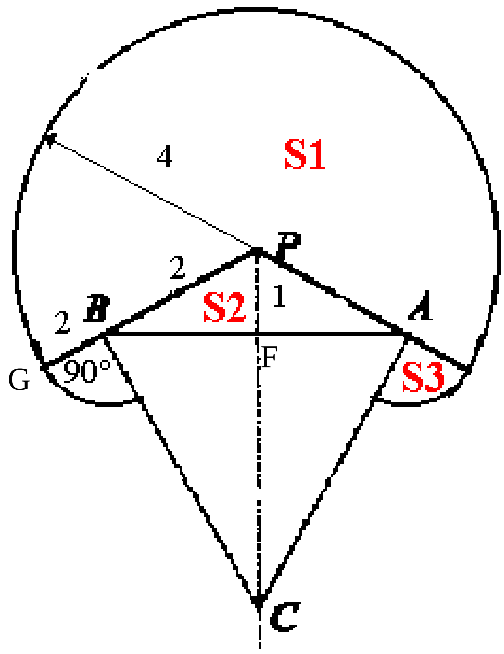
1. L'angolo APF = 60° (metà triangolo equilatero)
L'angolo PBF = 30°
L'angolo ABC = 60°
L'angolo GBC = 180° - 60° - 30° = 90°
L'angolo settore circolare = 360° - 60°- 60° = 240°



$$S_1 = \frac{4^2 \cdot \pi \cdot 240}{360} = 33{,}51$$

$S_2 = 2\sqrt{3} \cdot 1/2 = \sqrt{3}$

$S_3 = 2^2 \cdot \pi/2 = 6{,}283$

$S_T = S_1 + S_2 + S_3 =$ **41,52 m²**

2. a) $\tan(3x + 18°)\text{sen}(3x + 18°)+\cos(3x + 18°)=2$ sia $y = 3x + 18°$

$\tan y \cdot \text{sen } y + \cos y = 2$ dal teorema della tangente: $\tan y = \text{sen } y / \cos y$ da cui:

$$\frac{\text{sen } y}{\cos y} \cdot \text{sen } y + \cos y = 2 \rightarrow \frac{\text{sen}^2 y}{\cos y} + \cos y = 2$$ teorema fondamentale $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$:

$$\frac{1-\cos^2 y}{\cos y} + \cos y = 2 \rightarrow 1 - \cos^2 y + \cos^2 y = 2\cos y \rightarrow \frac{1}{2} = \cos y \rightarrow y = \arccos\frac{1}{2} \rightarrow y = 60$$

$y_1 = 60°$ → $3x+18=60+k.360$ → $\mathbf{x_1 = 14°+k.120°}$

$y_2 = 300°$ → $3x+18=300$ → $\mathbf{x_2 = 94°+ k.120°}$

b) $$\frac{\text{sen } x + \text{sen } 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} = 1$$

$\text{sen } x + \text{sen } 2x = 1 + \cos x + \cos 2x$
$\text{sen } x + 2\text{sen } x \cdot \cos x = 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1$
$\text{sen } x + 2\text{sen } x \cdot \cos x = \cos x + 2\cos^2 x$
$\text{sen } x\,(1 + 2\cos x) = \cos x\,(1 + 2\cos x)$
$\text{sen } x = \cos x \rightarrow \text{sen } x = \text{sen}(90°-x) \rightarrow x = 90° - x \rightarrow x = 45°$

$\mathbf{x_1 = 45°+k.360°;}$ $\mathbf{x_2 = 135°+k.360°}$

3.a)

$$s=\sqrt{H^2+R^2}$$

$$\frac{R}{s}=\frac{r}{H-r}(=\sin\alpha)\rightarrow\frac{R}{\sqrt{H^2+R^2}}=\frac{r}{H-r}$$

$$R(H-r)=r\sqrt{H^2+R^2}$$

$$R^2\left(H^2-2rH+r^2\right)=r^2\left(H^2+R^2\right)$$

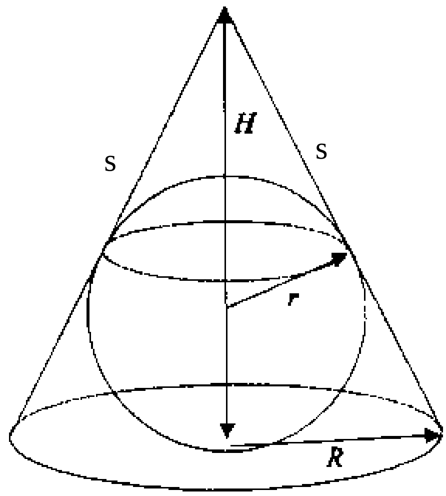
$$R^2H^2-2rHR^2+r^2R^2=r^2H^2+r^2R^2$$

$$R^2H^2-2rHR^2=r^2H^2$$

$$R^2H-2rR^2=r^2H$$

$$R^2H-r^2H=2rR^2$$

$$\boxed{H=\frac{2rR^2}{R^2-r^2}=\frac{2rR^2}{(R+r)(R-r)} \qquad R=\frac{r\cdot H}{\sqrt{H^2-2Hr}}}$$

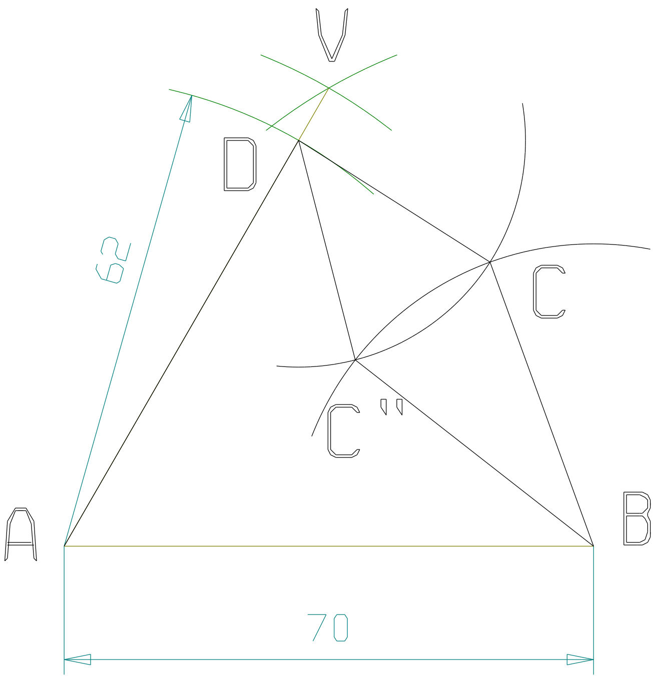


$$H=\frac{2rR^2}{R^2-r^2}\rightarrow H=\frac{2rH^2}{H^2-r^2}\rightarrow 1=\frac{2rH}{H^2-r^2}\rightarrow 2rH=H^2-r^2\rightarrow H^2-2rH-r^2=0$$

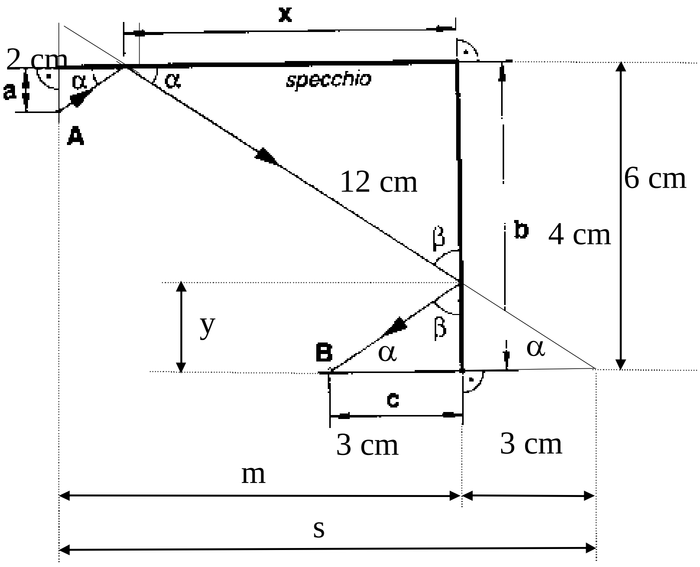
b) $$H_{1,2}=\frac{2r\pm\sqrt{4r^2+4r^2}}{2}=r\pm r\sqrt{2}=r\left(1\pm\sqrt{2}\right)\rightarrow \textit{valore negativo scartare}$$

$$\boxed{V_1=\frac{\left[r\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^3\cdot\pi}{3}}$$

4.
1. segmento AB=7 cm
2. Puntare in A con apertura AB
   Puntare in B con apertura BA
   $\rightarrow$ V (angolo di 60°)
3. Puntare A r = 6,2 cm $\rightarrow$ D
4. Puntare in B r = 4 cm
   e puntare in D r = 3 cm
   $\rightarrow$ C
   $\rightarrow$ C”



5. s = $\sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$



m = s - 3 = 6√3 - 3

$$\frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{y}{3} \rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

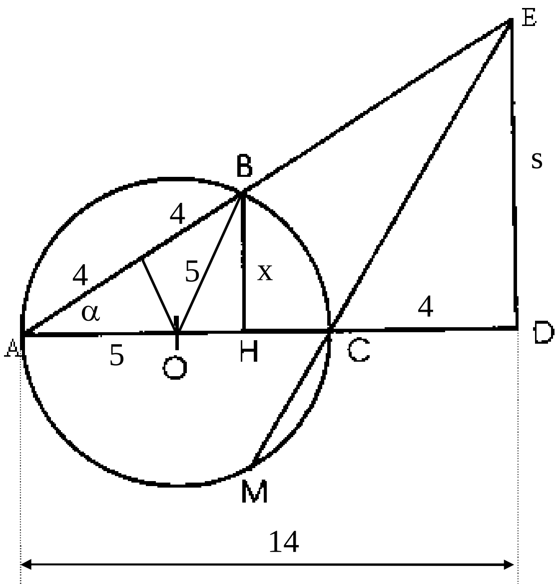
$$\frac{4-\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = 4\sqrt{3} - 3$$

$$\alpha = arc\tan\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^o$$

$$\beta = 90 - 30 = 60^o$$

x = 4√3 - 3; α = 30°; β = 60°

6. Il triangolo AOB è isoscele.



$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = \frac{14}{AE} \rightarrow AE = \frac{14 \cdot 5}{4} = 17{,}5$$

ED= $\sqrt{17{,}5^2 - 14^2}$ = 10,5

$$\frac{HB}{8} = \frac{10{,}5}{17{,}5} \rightarrow \text{HB} = 4{,}8$$

EC = $\sqrt{4^2 - 10{,}5^2}$ = 11,236..

CE · EM = EB · EA →

$\sqrt{4^2 - 10{,}5^2}$ · EM = 17,5 · (17,5 - 8) →

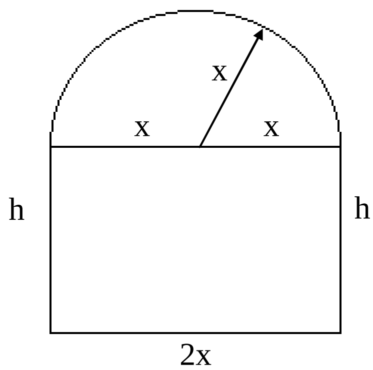
EM = 14,79

MC = 14,79 - 11,236 = 3,56

Matematica, esame finale 1997 maturità tecnica SPAI Bellinzona

Algebra

1. Perimetro:



$$4 = 2x + 2h + x\pi \rightarrow \quad x = \frac{4-2h}{2+\pi}$$

Area rettangolo: $A = 2xh$

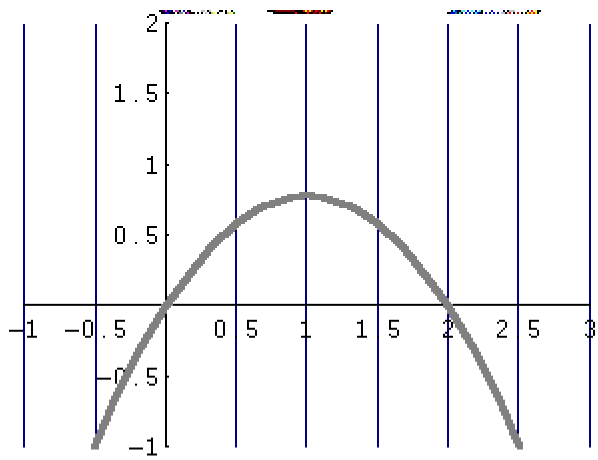
sostituendo:

$$A = 2h \cdot \frac{4-2h}{2+\pi} \rightarrow \boxed{A = \frac{8h-4h^2}{2+\pi}}$$

$$0 = \frac{8h-4h^2}{2+\pi} \rightarrow 0 = 8h - 4h^2 \rightarrow h_1=0 \quad h_2=2$$

Il massimo della funzione si ha quando:

$$h_{max} = \frac{0+2}{2} = 1 \rightarrow h_{max} = 1$$



2. a) $\log_3 (x + 2) = \log_9 (3x + 10)$

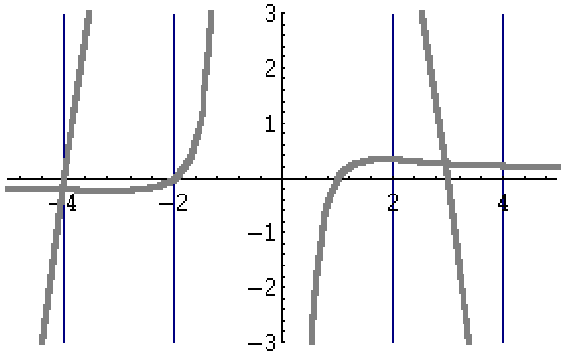
$$\begin{cases} \log_3(x+2) = k \\ \log_9(3x+10) = k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3^k = x+2 \\ 9^k = 3x+10 \rightarrow 3^{2k} = 3x+10 \rightarrow 3^k = \sqrt{3x+10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_3(x+2) = k \\ \log_3 \sqrt{3x+10} = k \end{cases} \rightarrow$$

$$\log_3(x+2) = \log_3 \sqrt{3x+10} \rightarrow x+2 = \sqrt{3x+10} \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 3x + 10 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$x_1 = -3$ (escluso); $\quad x_2 = 2$

b) (3-x)(x+4)>0 quando - 4 < x < 3



$$\frac{3x-2}{x^2} \le \frac{2}{x+1} \to \frac{3x-2}{x^2} - \frac{2}{x+1} \le 0$$

$$\frac{3x^2+x-2-2x^2}{x^2(x+1)} \le 0 \to \frac{x^2+x-2}{x^2(x+1)} \le 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x^2(x+1)} \le 0 \to \frac{3x^2+x-2-2x^2}{x^2(x+1)} \le 0$$

$$\frac{x^2+x-2}{x^2(x+1)} \le 0 \to \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)} \le 0$$

		-5	-4	-3	-2	-1,5	-1	0	1	2	3	4
	(3-x)(x+4)	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	-
	(3-x)(x+4)>0			Sì	Sì	Sì	Sì	Sì	Sì	Sì		
	x + 2	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
	x - 1	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
	x + 1	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
	$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)}$	-	-	-	0	+	mai	-	0	+	+	+
	$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)} \le 0$	Sì	Sì	Sì	Sì			Sì	Sì			
	Sistema			Sì	Sì			Sì	Sì			

S = { -4 < x ≤ -2 ∨ -1 < x ≤ 1 }

3. Sono date le seguenti funzioni :
f (x): parabola passante per i punti M(0;5), N(4;-3), P(14;12)
g(x) : retta di equazione y = x - 2

a)

$$\begin{cases} a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 5 \to c = 5 \\ a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c = -3 \\ a\cdot 14^2 + b\cdot 14 + c = 12 \end{cases} \to \begin{cases} a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + 5 = -3 \\ a\cdot 14^2 + b\cdot 14 + 5 = 12 \end{cases} \to \begin{cases} 16a + 4b = -8 \\ 196a + 14b = 7 \end{cases} \to \begin{cases} -112a - 28b = 56 \\ 392a + 28b = 14 \end{cases}$$

$$280a = 70 \to a = \frac{1}{4}; \qquad b = -3; \qquad c = 5 \qquad \to y = \frac{x^2}{4} - 3x + 5$$

Intersezione:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} - 3x + 5 \\ y = x - 2 \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{4} - 3x + 5 = x - 2 \rightarrow \frac{x^2}{4} - 4x + 7 = 0 \rightarrow x^2 - 16x + 28 = 0$$

$(x-14)(x-2) = 0 \rightarrow \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 14$

Se $x_1 = 2$, allora $y_1 = \dfrac{x^2}{4} - 3x + 5 = 0$ $\rightarrow$ A(2; 0)

Se $x_2 = 14$, allora $y_1 = \dfrac{x^2}{4} - 3x + 5 = 12$ $\rightarrow$ B(14; 12)

Vertice della parabola

1. modo: Zeri della funzione $y = \dfrac{x^2}{4} - 3x + 5$ $\quad x_3 = 2; \quad x_4 = 10$

$x_{min} = \dfrac{2+10}{2} = 6$ $\quad y_{min} = -4$ $\rightarrow$ C (6; -4)

2. modo: Derivata di $y = \dfrac{x^2}{4} - 3x + 5$ $\quad y' = \dfrac{x}{2} - 3$

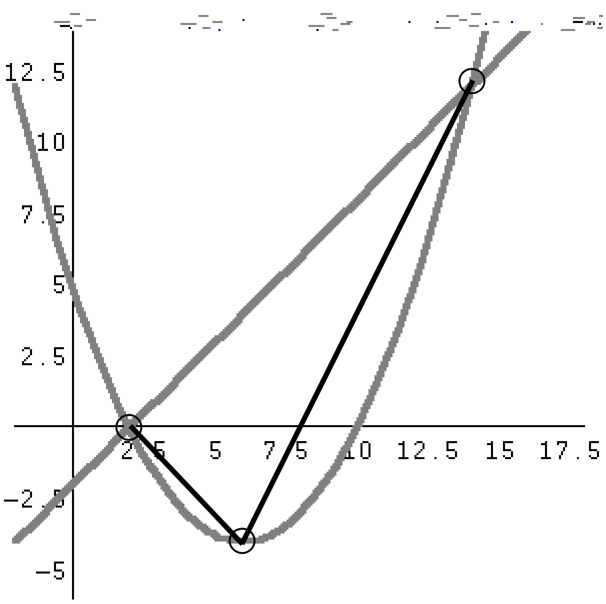
$\dfrac{x}{2} - 3 = 0$ $\rightarrow$ x = 6; y = -4 $\rightarrow$ C (6; -4)

b)

Lunghezza lati triangolo

AB = 12·√2
BC = 8 √5
AC= 4 √2

$BC^2 = AB^2 + AC^2$
320 = 288 + 32



4. Data la seguente equazione parametrica : (x incognita, a parametro)

$$2=\frac{a(1+3x-ax)+2}{x(a-3)}$$

a) risolvere l'equazione
b) discutere l'equazione

$$2=\frac{a(1+3x-ax)+2}{x(a-3)}\rightarrow 2xa-6x=a+3ax-a^2x+2\rightarrow ax+6x-a^2x=-2-a$$

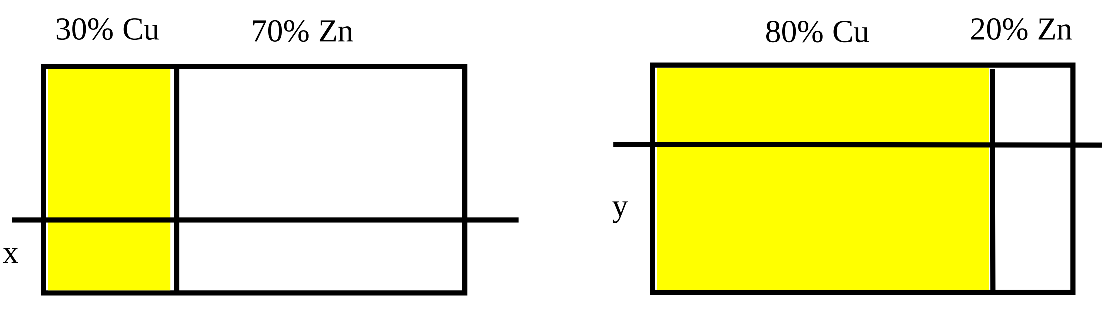
$$x=\frac{-2-a}{a+6-a^2}=\frac{a+2}{a^2-a-6}=x(a+2)(a-3)=a+2\rightarrow\frac{a+2}{(a+2)(a-3)}=\frac{1}{a-3}$$

a = -2; eq indeterminata   a= 3 eq. priva di significato (impossibile)

5. Un serbatoio viene riempito mediante due pompe principali. La prima pompa riempirebbe da sola il serbatoio in 6 ore (tempo di riempimento); la seconda lo riempirebbe, sempre da sola, in 7 ore. L'impianto è equipaggiato con una pompa ausiliaria che entra in funzione nel caso una delle pompe principali si dovesse guastare. Determina il tempo di riempimento della pompa ausiliaria, se in caso di guasto ad una delle due pompe principali il tempo totale di riempimento del serbatoio non deve superare le 5 ore.

Tempo pompa ausiliaria (= x) $5=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{7}}\rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\rightarrow\frac{1}{x}=\frac{2}{35}$ $\rightarrow$ x = 35/2

6.



$$\begin{cases}30x+80y=62\\70x+20y=38\end{cases}\rightarrow\begin{cases}30x+80y=62\\-280x-80y=-152\end{cases}\rightarrow -250x=-90\rightarrow x=\frac{9}{25}=\frac{36}{100}$$

36% di rame e 64% di zinco